Calcolo numerico e **programmazione**
Elementi di logica

Tullio Facchinetti
<tullio.facchinetti@unipv.it>

23 marzo 2012

10:50

http://robot.unipv.it/toolleeo

Algebra booleana (George Boole (1815-1864))

- è definita su due elementi (vero|falso, 0|1)
- costante booleana ::= 1|0
- operatore booleano ::= NOT|AND|OR
- una variabile booleana può assumere solo uno dei due valori 1 e 0
- il simbolo ::= significa "è definito come"
- il simbolo | significa "oppure"

NOT logico

simbolo: $\overline{}$

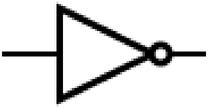


tabella di verità

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

$\overline{0} = 1 \quad \overline{1} = 0$

AND logico

simbolo: $\wedge$ o $\cdot$

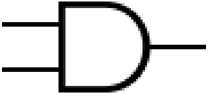


tabella di verità

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$1 \cdot 1 = 1$
$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 = 0$

OR logico

simbolo: $\vee$ o $+$

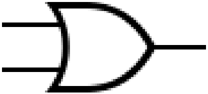


tabella di verità

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$0 + 0 = 0$
$1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$

Funzioni booleane o logiche

- sulle variabili booleane può essere definita una funzione booleana o logica $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ che per ogni n-pla x_i assume valori 0 e 1
- una particolare funzione logica F è definita quando ad essa è assegnata una "tavola di verità", una tabella in cui è specificato il valore che assume F in corrispondenza di ogni combinazione delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- il numero di combinazioni di n variabili è 2^n, cioè la tavola della verità è costituita da 2^n righe
- il numero di funzioni diverse date da n variabili è 2^{2^n} cioè con due variabili si possono definire 16 diverse funzioni

Funzioni booleane o logiche: esempio

uno studente si laurea se ha superato tutti gli esami e se ha svolto una tesi oppure un tema di laurea

variabili booleane

- L vale 1 se lo studente si laurea
- E vale 1 se ha superato tutti gli esami
- T vale 1 se ha svolto la tesi
- S vale 1 se ha svolto il tema

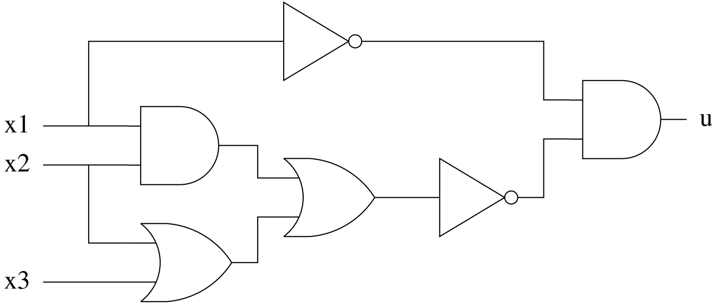
Funzioni booleane o logiche: esempio

$$L = E\overline{T}S + ET\overline{S} + ETS = ES + ET$$

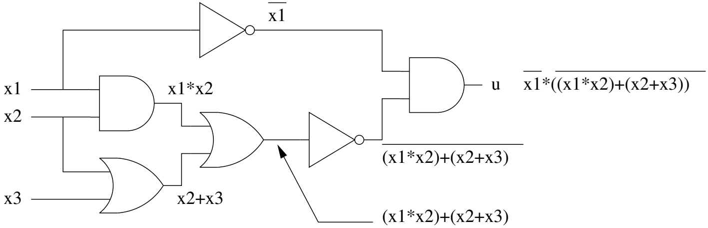
E	T	S	L	
0	0	0	0	
0	0	1	0	*
0	1	0	0	*
0	1	1	0	*
1	0	0	0	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	*

*casi non verificabili

Esempio di circuito logico



Esempio di circuito logico



$x1$	$x2$	$x3$	u
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Proprietà degli operatori booleani

- una espressione è duale di un'altra se ottenuta scambiando AND con OR e 0 con 1. Se un teorema è vero, anche il suo duale è vero.
- due espressioni si dicono complementari se $E_a = \overline{E_b}$
- teorema di De Morgan: l'espressione complementare di E si può ottenere dalla sua duale complementando in quest'ultima tutte le variabili

$$E = \overline{a} \cdot \overline{c} + a \cdot b$$

$$E_d = (\overline{a} + \overline{c}) \cdot (a + b)$$

$$\overline{E} = (a + c) \cdot (\overline{a} + \overline{b})$$

NAND

simbolo: $\uparrow$

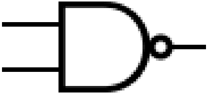


tabella di verità

	0	1
0	1	1
1	1	0

è la negazione logica dell'AND

NOR

simbolo: $\downarrow$

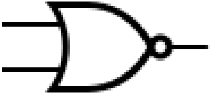


tabella di verità

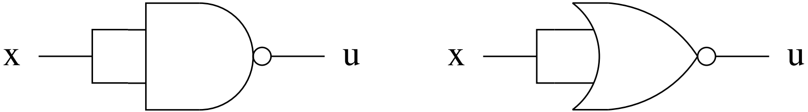
	0	1
0	1	0
1	0	0

è la negazione logica dell'OR

Operatori universali

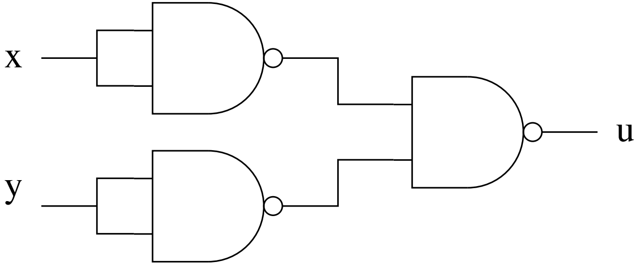
- NAND e NOR sono detti universali
- ciascuno può da solo realizzare i tre operatori fondamentali NOT, AND e OR

NOT mediante soli NAND o NOR



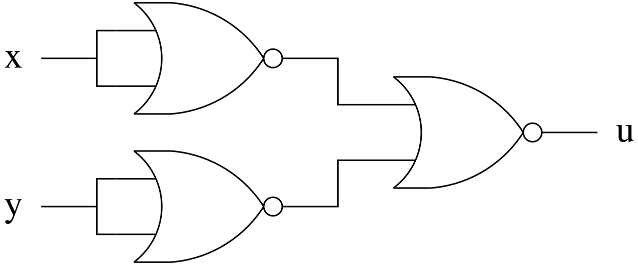
$$\overline{x} = \overline{x \cdot x} = \overline{x + x}$$

OR mediante soli NAND



$$x + y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$$

AND mediante soli NOR



$$x \cdot y = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$$

XOR

simbolo: $\oplus$

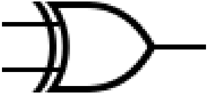


tabella di verità

	0	1
0	0	1
1	1	0

vale 1 soltanto quando gli ingressi sono discordi

XNOR

simbolo: nessuno

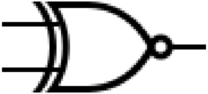


tabella di verità

	0	1
0	1	0
1	0	1

vale 1 soltanto quando gli ingressi sono concordi