Calcolo numerico e **programmazione**
Rappresentazione dei numeri

Tullio Facchinetti
<tullio.facchinetti@unipv.it>

16 marzo 2012

13:26

http://robot.unipv.it/toolleeo

Evoluzione storica

la rappresentazione più semplice

$|||||| \ldots$

- poco rappresentativa
- difficoltà di memorizzazione

numeri romani

$I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, \ldots$

- $1997 \rightarrow MCMXCVII$
- problemi di utilizzo nelle operazioni
- difficoltà di rappresentazione di numeri "grandi"

Numerazione decimale

é detta numerazione in base 10

cifra	7	5	0	2
valore	migliaia	centinaia	decine	unità
peso	10^3	10^2	10^1	10^0

$$7502 = 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

conteggio: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 $\rightarrow$ 0 con riporto

Rappresentazione di numeri interi

- si sceglie una base β
- si scelgono β simboli che rappresentano i numeri da 0 a $\beta - 1$ (cifre)
- i numeri sono rappresentati dai coefficienti del polinomio per le potenze della base
- si indica la base del sistema di numerazione con il pedice

$$(N)_\beta = A_s A_{s-1} \ldots A_1 A_0 \quad 0 \leq A_i \leq \beta - 1$$

$$\text{valore}(N) = A_s \beta^s + A_{s-1}\beta^{s-1} + \ldots + A_1 \beta^1 + A_0 \beta^0$$

la rappresentazione è posizionale poiché il peso della generica cifra A_i dipende dalla posizione di A_i

Numerazione binaria

rappresentazione in base $\beta = 2$

conteggio:

$0, 1 \to 0$ con riporto

$10, 11 \to 00$ con riporto

$100, \dots$

decimale	binario
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

Numerazione binaria

interpretazione del valore del numero binario 1010111010

cifra	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
posizione	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
peso	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
decimale	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

$$
\begin{aligned}
698 &= 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + \\
&\quad 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = \\
&= 512 + 128 + 32 + 16 + 8 + 2
\end{aligned}
$$

Operazioni binarie: somma e sottrazione

somma

+	0	1
0	0	1
1	1	0/1

differenza

-	0	1
0	0	1/1
1	1	0

esempio

$$\begin{array}{cccccc|c} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & + \\ & & 1 & 1 & 0 & 1 & = \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

esempio

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & - \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & = \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

Operazioni binarie: moltiplicazione

moltiplicazione

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

esempio

				1	1	0	0	1	x
					1	1	0	1	=
				1	1	0	0	1	
		1	1	0	0	1	-	-	
	1	1	0	0	1	-	-	-	
1	0	1	0	0	0	1	0	1	

Operazioni binarie: divisione

esempio

1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1		1			
		1	1	1	1	0		

Sistema ottale

- utilizza 8 cifre (o simboli)
- simboli usati: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

interpretazione del valore del numero ottale 3715

cifra	3	7	1	5
posizione	3	2	1	0
peso	8^3	8^2	8^1	8^0
decimale	512	64	8	1

$$\begin{aligned} 3715 &= 3 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = \\ &= 3 \cdot 512 + 7 \cdot 64 + 8 + 5 = \\ &= 1536 + 448 + 8 + 5 = 1997 \end{aligned}$$

Sistema esadecimale

- utilizza 16 cifre (o simboli)
- simboli usati: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

interpretazione del valore del numero esadecimale $7CD$

cifra	7	C	D
posizione	2	1	0
peso	16^2	16^1	16^0
decimale	256	16	1

$$\begin{aligned} 7CD &= 7 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = \\ &= 7 \cdot 256 + 12 \cdot 16 + 13 = \\ &= 1792 + 192 + 13 = 1997 \end{aligned}$$

Esempi

base 2

- $(1010)_2 = 2^3 + 2 = (10)_{10}$
- $(1100100)_2 = 2^6 + 2^5 + 2^2 = (100)_{10}$
- $(1111101000)_2 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 = (1000)_{10}$

base 8

- $(12)_8 = 8 + 2 = (10)_{10}$
- $(144)_8 = 8^2 + 4 \cdot 8 + 4 = (100)_{10}$
- $(1750)_8 = 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 = 512 + 448 + 40 = (1000)_{10}$

base 16

- $(A)_{16} = (10)_{10}$
- $(64)_{16} = 6 \cdot 16 + 4 = (100)_{10}$
- $(3E8)_{16} = 3 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16 + 8 = 768 + 224 + 8 = (1000)_{10}$

Numeri frazionari

numero frazionario con 5 cifre decimali:

$$N_\beta = 0, A_{-1}A_{-2}A_{-3}A_{-4}A_{-5}$$

valore $\quad N_\beta = A_{-1}\beta^{-1} + A_{-2}\beta^{-2} + A_{-3}\beta^{-3} + A_{-4}\beta^{-4} + A_{-5}\beta^{-5}$

esempio:

$$N_{16} = 0, F670A$$

valore $\quad N_{16} = F \cdot 16^{-1} + 6 \cdot 16^{-2} + 7 \cdot 16^{-3} + 0 \cdot 16^{-4} + A \cdot 16^{-5}$

Numeri frazionari

in generale:

$$Q_\beta = A_s A_{s-1} \dots A_1 A_0, A_{-1} A_{-2} A_{-3} \dots A_{-R} \quad \forall 0 \leq A_i \leq \beta - 1$$

$$\text{valore} \quad Q_\beta = \begin{array}{l} A_s\beta^s + A_{s-1}\beta^{s-1} + \ldots + A_1\beta^1 + A_0\beta^0 + \\ A_{-1}\beta^{-1} + A_{-2}\beta^{-2} + \ldots + A_{-R}\beta^{-R} \end{array}$$

Numeri frazionari

esempi:

$$\beta = 10, N = 325,23_{10}$$

$$N = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

$$\beta = 2, N = 101,01_2$$

$$N = 1 \cdot 2^2 + 1 + 1 \cdot 2^{-2} = 4 + 1 + 0,25 = 5,25_{10}$$

Conversione di base di numeri interi

sia dato un numero N_α in una base α

rappresentarlo in base β significa scrivere

$$N_\alpha = N_\beta = x_0 + \beta(x_1 + \beta(\ldots \beta x_s))$$

dividendo N_α per la base β si ottiene un quoziente N_1 ed un resto R_0

uguagliando si ottiene

$$N_\alpha = R_0 + \beta N_1 = x_0 + \beta(x_1 + \beta(x_2 + \ldots))$$

Conversione di base di numeri interi

$$N_\alpha = R_0 + \beta N_1 = x_0 + \beta(x_1 + \beta(x_2 + \ldots))$$

si può scrivere nella forma

$$x_0 = R_0$$

$$(x_1 + \beta(x_2 + \ldots)) = N_1$$

iterando il procedimento con N_1 al posto di N_α, si ottengono tutti i coefficienti del polinomio nelle potenze di β, cioè la codifica di N_α nella nuova base

Conversione di base di numeri interi

da base 10 a base 2:

1258	0
629	1
314	0
157	1
78	0
39	1
19	1
9	1
4	0
2	0
1	1
0	

$$(1258)_{10} = (10011101010)_2$$

da base 10 a base 8:

1258	2
157	5
19	3
2	2
0	

$$(1258)_{10} = (2352)_8$$

da base 10 a base 16:

1258	10
78	14
4	4
0	

$$(1258)_{10} = (4EA)_{16}$$

Conversione di base di numeri frazionari

sia dato un numero N_α in una base α

rappresentarlo in base β significa scrivere

$$F_\alpha = F_\beta = \beta^{-1}(x_{-1} + \beta^{-1}(x_{-2} + \beta^{-1}(\ldots \beta^{-1} x_{-r})))$$

moltiplicando F_α per la base β si ottiene una parte intera I ed una parte frazionaria F_1

uguagliando

$$F_\alpha \cdot \beta = I + F_1$$

Conversione di base di numeri frazionari

da cui:

$$x_{-1} = I$$

$$\beta^{-1}(x_{-2} + \beta^{-1}(\ldots \beta^{-1} x_{-r}) \ldots) = F_1$$

iterando il procedimento con F_1 al posto di F_α, si ottengono i coefficienti del polinomio nelle potenze di β, cioè la codifica di F_α nella nuova base, e quindi F_β

il procedimento termina quando $F_l = 0$, oppure quando si è raggiunta la precisione desiderata (errore $< \beta^{-r}$ se ci si ferma al termine x_{-r})

Conversione di base di numeri frazionari

da base 10 a base 2:

0.59375	
1.18750	1
0.37500	0
0.75000	0
1.50000	1
1.00000	1

$$(0.59375)_{10} = (0.10011)_2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

da base 10 a base 8:

0.59375	
4.75000	4
6.00000	6

$$(0.59375)_{10} = (0.46)_8$$

da base 10 a base 16:

0.59375	
9.50000	9
8.00000	8

$$(0.59375)_{10} = (0.98)_{16}$$

Conversione di base di numeri frazionari

base $10 \rightarrow 2$:

$$\begin{array}{ll} 0.1 & \\ 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0 \\ 0.8 & 0 \\ 1.6 & 1 \\ 1.2 & 1 \\ 0.4 & 0 \\ 0.8 & 0 \\ \ldots & \end{array}$$

$$(0.1)_{10} = (0.0\overline{0011})_2$$

base $10 \rightarrow 8$:

$$\begin{array}{ll} 0.1 & \\ 0.8 & 0 \\ 6.4 & 6 \\ 3.2 & 3 \\ 1.6 & 1 \\ 4.8 & 4 \\ \ldots & \end{array}$$

$$(0.1)_{10} = (0.0\overline{6314})_8$$

base $10 \rightarrow 16$:

$$\begin{array}{ll} 0.1 & \\ 1.6 & 1 \\ 9.6 & 9 \\ \ldots & \end{array}$$

$$(0.1)_{10} = (0.1\overline{9})_{16}$$

può accadere che a un numero decimale non periodico corrisponda un numero binario, ottale o esadecimale periodico

Esempio: convertire il numero $58,07_{10}$ in binario

parte intera	parte frazionaria
$58 = 29 \times 2 + 0 \to X_0 = 0$	$0,07 \times 2 = 0.14 \to X_{-1} = 0$
$29 = 14 \times 2 + 1 \to X_1 = 1$	$0,14 \times 2 = 0.28 \to X_{-2} = 0$
$14 = 7 \times 2 + 0 \to X_2 = 0$	$0,28 \times 2 = 0.56 \to X_{-3} = 0$
$7 = 3 \times 2 + 1 \to X_3 = 1$	$0,56 \times 2 = 1.12 \to X_{-4} = 1$
$3 = 1 \times 2 + 1 \to X_4 = 1$	$0,12 \times 2 = 0.24 \to X_{-5} = 0$
$1 = 0 \times 2 + 1 \to X_5 = 1$	$0,24 \times 2 = 0.48 \to X_{-6} = 0$
	$0,48 \times 2 = 0.96 \to X_{-7} = 0$
	$0,96 \times 2 = 1.92 \to X_{-8} = 1$
	$0,92 \times 2 = 1.84 \to X_{-9} = 1$
	(tronchiamo qui)

il numero in binario è: 111010,000100011

Esempio: convertire il numero $4287,312_{10}$ in esadecimale

parte intera		parte frazionaria
$4287 : 16 = 267$	$RESTO = 15 \rightarrow F$	$0,312 \times 16 = 4,992 \rightarrow 4$
$: 16 = 16$	$RESTO = 11 \rightarrow B$	$0,992 \times 16 = 15,872 \rightarrow F$
$16 : 16 = 1$	$RESTO = 0 \rightarrow 0$	$0,872 \times 16 = 13,952 \rightarrow D$
$: 16 = 0$	$RESTO = 1 \rightarrow 1$	$0,952 \times 16 = 15,232 \rightarrow F$
		(tronchiamo qui)

il numero in esadecimale è: 10BF,4FDF

Conversione di base

conversione di un numero dalla base β_1 alla base β_2 con $\beta_2 = \beta_1^k$ dove k è un intero ≥ 2

esempio: $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 8 = 2^3$

$$
\begin{aligned}
N_2 &= d_k d_{k-1} \dots d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0 \\
&= d_k 2^k + \dots + d_5 2^5 + d_4 2^4 + d_3 2^3 + d_2 2^2 + d_1 2^1 + d_0 2^0 \\
&= \dots + (d_5 2^2 + d_4 2^1 + d_3 2^0) 2^3 + (d_2 2^2 + d_1 2^1 + d_0 2^0) 2^0 \\
&= c_h 2^{3*h} + \dots + c_2 2^{3*2} + c_1 2^{3*1} + c_0 2^{3*0} \quad \text{con} 0 \leq c_i \leq 7 \\
&= c_h 8^h + \dots + c_2 8^2 + c_1 8^1 + c_0 8^0 \\
N_8 &= c_h c_{h-1} \dots c_5 c_4 c_3 c_2 c_1 c_0
\end{aligned}
$$

Conversione di base

- se una base è potenza dell'altra, con esponente k, la conversione è molto semplice
- basta sostituire ogni gruppo di k cifre del numero in una base (β_1) con la cifra corrispondente nell'altra base (β_2) o viceversa

> se il numero di bit non è multiplo di k, aggiungere gli 0 necessari a renderlo tale in posizioni che non modifichino il valore del numero

Conversioni fra basi diverse: esempi

esempio: $16 \rightarrow 2$

$$\begin{array}{ll} 0 \rightarrow 0000 & 8 \rightarrow 1000 \\ 1 \rightarrow 0001 & 9 \rightarrow 1001 \\ 2 \rightarrow 0010 & A \rightarrow 1010 \\ 3 \rightarrow 0011 & B \rightarrow 1011 \\ 4 \rightarrow 0100 & C \rightarrow 1100 \\ 5 \rightarrow 0101 & D \rightarrow 1101 \\ 6 \rightarrow 0110 & E \rightarrow 1110 \\ 7 \rightarrow 0111 & F \rightarrow 1111 \end{array}$$

Conversioni fra basi diverse: esempi

esempio 1:

$$\begin{array}{rr} 10011101010_2 & (1258)_{10} \\ 10|011|101|010_2 & (2352)_8 \\ 100|1110|1010_2 & (4EA)_{16} \end{array}$$

esempio 2:

$$\begin{array}{lr} 0.1001100000_2 & (0.59375)_{10} \\ 0.100|110|000|0_2 & (0.46)_8 \\ 0.1001|1000|00_2 & (0.98)_{16} \end{array}$$

Conversioni fra basi diverse: esempi

si può fare anche il passaggio inverso:

$$\begin{array}{lr} 1F5_{16} & (1|1111|0101)_2 \\ 7526_8 & (111|101|010|110)_2 \\ 7526_{16} & (111|0101|0010|0110)_2 \end{array}$$

$$(0.0\overline{6314})_8 = 0.000\overline{110011001100} = 0.0\overline{0011}$$

$$(0.1\overline{9})_{16} = 0.0001\overline{1001} = 0.0\overline{0011}$$

Esempio: conversione da base 8 a base 16

numero da convertire: 6152047_8

	6	1	5	2	0	4	7	base 8
$0\ 0\ 0$	$1\ 1\ 0$	$0\ 0\ 1$	$1\ 0\ 1$	$0\ 1\ 0$	$0\ 0\ 0$	$1\ 0\ 0$	$1\ 1\ 1$	

$$\underbrace{0\ 0\ 0\ 1}_{1}\ \underbrace{1\ 0\ 0\ 0}_{8}\ \underbrace{1\ 1\ 0\ 1}_{D}\ \underbrace{0\ 1\ 0\ 0}_{4}\ \underbrace{0\ 0\ 1\ 0}_{2}\ \underbrace{0\ 1\ 1\ 1}_{7}\quad \text{base 16}$$

risultato: $18D427_{16}$

i numeri in blu sono fittizi e sono stati inseriti per convertire la cifra più significativa

Esempio: conversione da base 16 a base 8

numero da convertire: $FC08A_{16}$

F C 0 8 A base 16

0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0

3 7 4 0 2 1 2 base 8

risultato: 3740212_8

> i numeri in blu sono fittizi e sono stati inseriti per convertire la cifra più significativa

Rappresentazione in complemento

complemento alla base

dato un numero X in una base β di n cifre, il complemento alla base è definito come:

$$\beta^n - X$$

complemento alla base -1 (o alla base diminuita)

dato un numero X in una base β di n cifre, il complemento alla base -1 è definito come:

$$(\beta^n - 1) - X$$

Complemento base 10

esempio:
$X = 36$, $\beta = 10$, $n = 2$
complemento alla base è: $10^2 - X = 100 - 36 = 64$

esempio:
$X = 1630$, $\beta = 10$, $n = 4$
complemento alla base è: $10^4 - X = 10000 - 1630 = 8370$

regola pratica

il complemento a 10 si trova analizzando le cifre a partire da destra: gli zeri fino alla prima cifra significativa si riportano tali e quali, della prima cifra significativa si fa il complemento a 10, di tutte le altre il complemento a 9

Complemento alla base

$X = 01011$, $\beta = 2$, $n = 5$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & = \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$X = 0011000$, $\beta = 2$, $n = 7$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & = \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

regola pratica

si riportano invariati tutti gli zeri fino al primo bit a 1, si riporta questo invariato, si complementano i rimanenti bit $(0 \to 1,\ 1 \to 0)$

Complemento alla base -1

$X = 36$, $\beta = 10$, $n = 2$

il complemento alla base -1 è:
$99 - 36 = 63$
si ottiene complementando a 9 ogni singola cifra

$X = 01011$, $\beta = 2$, $n = 5$

il complemento alla base -1 è:
$(2^5 - 1) - X = (100000 - 1) - X = 11111 - 01011 = 10100$
si ottiene complementando ogni singolo bit ($0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$)

Complemento alla base

> il complemento alla base si ottiene anche sommando 1 al complemento alla base −1 (per definizione)

$C_\beta = \beta^n - X$
$C_{\beta-1} = (\beta^n - 1) - X$
$C_\beta - C_{\beta-1} = 1$

esempio:
$C_\beta(36) = 64$
$C_{\beta-1}(36) = 63$

Complemento alla base [-1]

il complemento alla base [-1] è definito solo quando si è stabilito il numero di cifre

il complemento alla base [-1] per
$X = 36$, $\beta = 10$, $n = 2$ è:

$$64 \quad [63]$$

il complemento alla base [-1] per
$X = 36$, $\beta = 10$, $n = 3$ è:

$$964 \quad [963]$$

Rappresentazione di numeri negativi

binario puro

viene anteposto il segno - (meno)

- 6 (decimale) → 110 (binario)
- -6 (decimale) → -110 (binario)

modulo e segno

codifica identica al binario, con la differenza che il primo bit indica il segno

- 6 (decimale) → 0110 (modulo e segno)
- -6 (decimale) → 1110 (modulo e segno)

Rappresentazione di numeri negativi

complemento a 1

codifica identica al modulo e segno, con la differenza che i numeri negativi vengono complementati a 1

- 6 (decimale) → 0110 (modulo e segno)
- -6 (decimale) → 1110 (modulo e segno) → 1001 (complemento a 1)

complemento a 2

codifica identica al complemento a 1, con la differenza che ai numeri negativi viene ancora sommata una unità

- 6 (decimale) → 0110 (modulo e segno)
- -6 (decimale) → 1001 (complemento a 1) → 1010 (complemento a 2)